

Grzegorz SIERPIŃSKI¹

UŻYCIE MODELU KOLEJKOWEGO M/G/1 DO BUDOWY MODELU STRAT CZASU POJAZDÓW NA SKRZYŻOWANIU Z SYGNALIZACJĄ ŚWIETLNA

Streszczenie. W artykule krótko scharakteryzowano model kolejkowy M/G/1. Przedstawiono również możliwość użycia formuły średniego oczekiwania w kolejce z tego modelu jako składnika modelu strat czasu. Zaprezentowany model strat czasu uwzględnia zmienność czasów obsługi na skrzyżowaniu z sygnalizacją świetlną.

M/G/1 QUEUING MODEL USAGE TO CONSTRUCT TRAFFIC DELAY MODEL FOR SIGNALISED INTERSECTION

Summary. The article includes a short review of the M/G/1 queuing model. Possibility usage average waiting time in queue as a component of traffic delay model was described too. Presented traffic delay model allows estimating time delay in case of large service times variations.

1. WPROWADZENIE

Teoria masowej obsługi ma szerokie spektrum zastosowań. Metody teorii kolejek, w ostatnich czasach stosunkowo szeroko rozpowszechniane, znajdują zastosowanie w wielu dziedzinach, a zakres zadań praktycznych rozwiązywanych za pomocą tych metod wciąż się rozszerza. Przede wszystkim modele kolejkowe używane są w takich dziedzinach życia, jak: potoki ruchu, planowanie, optymalizacja, zarządzanie zasobami ludzkimi.

Użycie teorii kolejek do opisu zdarzeń występujących na skrzyżowaniu z sygnalizacją świetlną stwarza możliwość szybkiego uzyskania wszelakich charakterystyk wystarczająco odpowiadających rzeczywistości, których empiryczne poznanie byłoby czasochłonne, a niejednokrotnie wręcz niemożliwe.

Zwykle w modelu kolejkowym przyjmuje się założenie, iż system jest w równowadze, tzn. intensywność ruchu jest mniejsza od jedności:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad (1)$$

gdzie:

ρ – intensywność ruchu [-],

¹ Wydział Transportu, Politechnika Śląska, Krasińskiego 8, 40-019 Katowice, grzegorz.sierpinski@polsl.pl

λ – intensywność zgłoszeń [P/s],

μ – intensywność obsługi [P/s].

2. KRÓTKA CHARAKTERYSTYKA MODELU M/G/1

W systemie masowej obsługi M/G/1:

- liczba zgłoszeń, jakie przybywają do układu obsługi w czasie t , jest zgodna z rozkładem Poissona o parametrze λ , postaci:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (2)$$

- odstępy czasu między kolejnymi zgłoszeniami są zgodne z rozkładem wykładniczym o parametrze λ (rozumianym jako wartość oczekiwana), który określa funkcja gęstości:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0; \quad (3)$$

i dystrybuanta rozkładu równa:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad (4)$$

- czas obsługi posiada rozkład dowolny;
- pojedynczy kanał obsługi.

Rozkład czasów obsługi jest określany za pomocą dwóch wielkości:

- wartość oczekiwana (średnia) – m

$$m = E(X) = \sum x_i \cdot P(x_i); \quad (5)$$

- wariancja – σ^2

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum x_i^2 \cdot P(x_i) - m^2. \quad (6)$$

Natomiast poszczególne mierniki wydajności i efektywności dla modelu M/G/1 są następujące:

- średnia liczba klientów w systemie – $\bar{L}$

$$\bar{L} = \rho + \frac{\lambda^2 \cdot (\mu^{-2} + \sigma^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \rho + \frac{\rho^2 \cdot (1 + \sigma^2 \cdot \mu^2)}{2 \cdot (1 - \rho)}; \quad (7)$$

- średnia liczba klientów w kolejce – $\bar{L}_q$

$$\bar{L}_q = \frac{\lambda^2 \cdot (\mu^{-2} + \sigma^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{\rho^2 \cdot (1 + \sigma^2 \cdot \mu^2)}{2 \cdot (1 - \rho)}; \quad (8)$$

- średni czas oczekiwania w systemie – $\bar{W}$

$$\bar{W} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda \cdot (\mu^{-2} + \sigma^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho^2 \cdot (1 + \sigma^2 \cdot \mu^2)}{2 \cdot \lambda \cdot (1 - \rho)}; \quad (9)$$

- średni czas oczekiwania w kolejce – $\bar{W}_q$

$$\bar{W}_q = \frac{\lambda \cdot (\mu^{-2} + \sigma^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{\rho^2 \cdot (1 + \sigma^2 \cdot \mu^2)}{2 \cdot \lambda \cdot (1 - \rho)}. \quad (10)$$

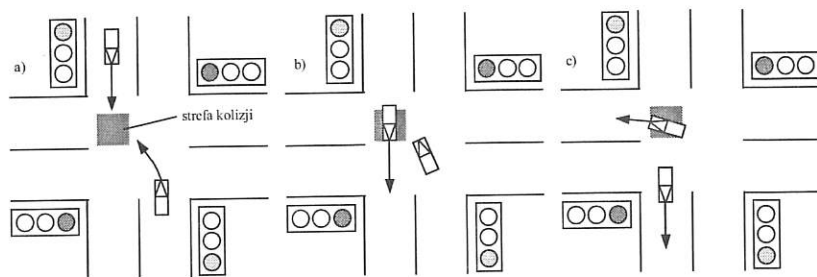
3. ŚREDNI CZAS OCZEKIWANIA W KOLEJCE JAKO ELEMENT MODELU STRAT CZASU

Wzór (10) opisuje średni czas oczekiwania w kolejce dla modelu M/G/1. Pojazd oczekując w kolejce na obsługę (przejazd przez skrzyżowanie), uzależnia swój stan między innymi od pojazdu poprzedzającego. Przy stałych czasach obsługi każdy kolejny pojazd, podczas wyświetlania światła zielonego, oczekiwałby po prostu wielokrotność odpowiedniej liczby czasów obsługi. W rzeczywistości czasy obsługi różnią się, co powoduje dodatkową stratę czasu, gdy wariancja czasów obsługi jest duża. Obsługa pojazdów na skrzyżowaniu z sygnalizacją świetlną zależy od wielu czynników. Należą do nich m. in.:

- relacja kierunkowa;
- organizacja ruchu;
- konkretna sytuacja ruchowa.

Jedynie pojazdy w relacji na wprost mogą po otrzymaniu zezwolenia na wjazd na skrzyżowanie „swobodnie” przez nie przejechać. W przypadku relacji skrętnych mogą wystąpić czynniki, które dodatkowo wydłużają czas przejazdu. Pojazdy tych relacji muszą ustąpić pierwszeństwa pieszym oraz relacji nadrzędnej, jeśli ta otrzymuje zezwolenie na przejazd w tej samej fazie sygnalizacyjnej. Przykładowy przejazd pojazdu skręcającego w lewo z koniecznością ustąpienia pojazdom nadrzędnym przedstawia rysunek 1.

Takie przypadki zostają uwzględnione w modelu M/G/1 poprzez wariancję czasu obsługi σ^2 .



Rys. 1. Realizacja skrętu w lewo na skrzyżowaniu z sygnalizacją świetlną [6]
Fig. 1. Left-turn on intersection with traffic lights [6]

W celu pełnego opisu strat czasu na skrzyżowaniu z sygnalizacją świetlną należy uwzględnić okresowe wstrzymywanie ruchu podczas nadawania sygnału czerwonego. Przy opisie tego elementu stosuje się wzór dla modelu deterministycznego (11) stanowiący składnik wielu dawniej i współcześnie stosowanych modeli strat czasu.

$$\bar{W} = \frac{T_c \cdot \left(1 - \frac{G_e}{T_c}\right)^2}{2 \cdot \left(1 - \frac{G_e}{T_c} \cdot \rho\right)} \quad (11)$$

gdzie:

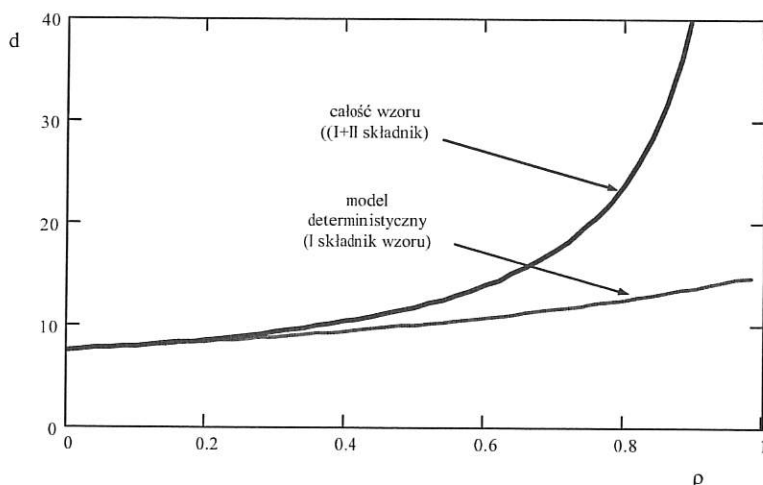
$\bar{W}$ – średni czas czekania na pojazd [s],
 ρ – intensywność ruchu [-],

G_e – efektywny czas zielony [s],

T_c – długość cyklu sygnalizacji [s].

Łącząc dwa wyrażenia – średni czas czekania dla modelu deterministycznego (11) oraz średni czas oczekiwania w kolejce dla modelu M/G/1 (10) otrzymano formułę określającą straty czasu dla skrzyżowania z sygnalizacją świetlną, uwzględniającą zmienność czasów obsługi (12).

$$d = \frac{T_c \cdot \left(1 - \frac{G_e}{T_c}\right)^2}{2 \cdot \left(1 - \frac{G_e}{T_c} \cdot \rho\right)} + \frac{\rho^2 \cdot (1 + \sigma^2 \cdot \mu^2)}{2 \cdot \lambda \cdot (1 - \rho)} \quad (12)$$



Rys. 2. Graficzna interpretacja formuły (12)

Fig. 2. Graphic interpretation of delay formula (12)

4. PODSUMOWANIE

Obsługa pojazdów na skrzyżowaniu z sygnalizacją świetlną jest zagadnieniem złożonym. Wynika to z faktu istnienia wielu czynników zakłócających i wydłużających przejazd.

Wykorzystanie modelu kolejkowego M/G/1 jako elementu składowego formuły określającej straty czasu na skrzyżowaniu z sygnalizacją świetlną pozwala uwzględnić zmienność czasów obsługi. Rozkład dowolny czasów obsługi, określany za pomocą wartości średniej oraz wariancji czasu obsługi σ^2 , umożliwia dobre odwzorowanie rzeczywistości przy zmiennych warunkach na różnych typach skrzyżowań z sygnalizacją świetlną.

Literatura

1. Adan I., Resing J.: Queueing Theory. Eindhoven University of Technology, Eindhoven 2002.
2. Datka S., Suchorzewski W., Tracz M.: Inżynieria ruchu. WKiŁ, Warszawa 1999.

3. Gartner N., Messer C. J., Rathi A. K.: Traffic Flow Theory A State-of-the-Art Raport. Transportation Research Board, <http://www.cta.ornl.gov/cta/research/trb/tft.html>
4. Kleinrock L.: Queueing Systems. Volume I: Theory. A Wiley-Interscience Publication, Canada 1975.
5. Sierpiński G.: Obsługa pojazdów na skrzyżowaniach z sygnalizacją świetlną. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Transport, z 56, s. 347 – 352, Gliwice 2004.
6. Sierpiński G.: Opóźnienie „kolizyjne” na skrzyżowaniach z sygnalizacją świetlną – pojazdy skręcające w lewo. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Transport, z 57, s. 365 – 370, Gliwice 2005.
7. Webster F. V.: Traffic signal settings. Road Research Paper No. 39, Her Majesty's Stationary Office, London 1958.
8. Webster F. V., Cobbe B. M.: Traffic Signals. Road Research Paper No. 56, Her Majesty's Stationary Office, London 1966.
9. Woch J.: Teoria potoków ruchu (w druku).

Recenzent: Dr hab. inż. Romuald Szopa, prof. Politechniki Częstochowskiej